11/05/17

· Έστω $f: G \to G'$ ομομορφισμός ομάδων.

$Ker(f) = \{x \in G \mid f(x) = e'\} \trianglelefteq G$

$Im(f) = \{f(x) \in G' \mid x \in G\}$

(*) Ο πυρήνας ενός ομομορφισμού ομάδων, είναι κανονική υποομάδα.

Αντίστροφα, κάθε κανονική υποομάδα μιας ομάδας είναι πυρήνας κάποιου ομομορφισμού.

Πράγματι, θεωρούμε μια κανονική υποομάδα μιας ομάδας $G$, έστω $H \trianglelefteq G$, Τότε ορίζεται η ομάδα πηλίκο $G/H = \{xH \subseteq G \mid x \in G\}$. Τότε η απεικόνιση $\pi : G \to G/H$, $\pi(x) = xH$ είναι επιμορφισμός ομάδων και ο πυρήνας του $Ker(\pi) = H$.

$\pi(x\cdot y) = (x\cdot y)H = (xH)\cdot(yH) = \pi(x)\cdot\pi(y) \Rightarrow \pi$: ομομορφισμός.
$\forall \alpha \in G/H : \exists x \in G : xH = \alpha$. Τότε $\pi(x) = xH = \alpha \Rightarrow \pi$: επί.
$Ker(\pi) = \{x \in G \mid \pi(x) = e_{G/H}\} = \{x \in G \mid xH = eH\} =$
$= \{x \in G \mid xH = H\} = \{x \in G \mid x \in H\} = H.$

Έστω $f: G \to G'$ ένας ομομορφισμός ομάδων

- $f$: μονομορφισμός $\Leftrightarrow f$: 1-1.
- $f$: επιμορφισμός $\Leftrightarrow f$: επί
- $f$: ισομορφισμός $\Leftrightarrow f$: 1-1 κ' επί.

Πρόταση: ① $f$: μονομορφισμός $\Leftrightarrow Ker(f) = \{e\}$.
② $f$: επιμορφισμός $\Leftrightarrow$ ~~Ker~~ $Im(f) = G'$
③ $f$: ισομορφισμός $\Leftrightarrow \exists g: G' \to G$ ομομορφισμός ομάδων, έτσι ώστε: $f\circ g = Id_{G'}$ και $g \circ f = Id_G$ (και $g = f^{-1}$)

Απόδ: ① ($\Rightarrow$) Έστω $f$: μονομορφισμός $\Rightarrow f$: 1-1. Έστω $x \in Ker(f)$.
Τότε $f(x) = e' = f(e) \xRightarrow{f:1-1} \boxed{x=e}$. Άρα $Ker(f) = \{e\}$.
($\Leftarrow$) Υποθ. ότι $Ker(f) = \{e\}$. Έστω ότι $f(x) = f(y) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)\cdot(f(y))^{-1} = f(y)\cdot(f(y))^{-1} \Rightarrow f(x)\cdot f(y^{-1}) = e' \Rightarrow$
$\xRightarrow{f:\text{ομομ.}} f(x\cdot y^{-1}) = e' \Rightarrow x\cdot y^{-1} \in Ker(f) = \{e\} \Rightarrow x\cdot y^{-1} = e \Rightarrow \boxed{x=y} \Rightarrow$
$\Rightarrow f$: 1-1 $\Rightarrow f$: μονομορφισμός.

② Προφανές.
③ ($\Leftarrow$) Έστω ότι $\exists g: G' \to G$ ομομορφισμός ομάδων έτσι ώστε $f \circ g = Id_{G'}$ και $g \circ f = Id_G$. Επειδή $g \circ f = Id_G \Rightarrow$ $\Rightarrow f$: 1-1 και $f \circ g = Id_{G'} \Rightarrow f$: επί. Άρα $f$: ισομορφισμός.
($\Rightarrow$) Έστω ότι $f$: ισομορφισμός δηλαδή $f$: 1-1 και επί άρα ορίζεται η $f^{-1}: G' \to G$ και προφανώς $f \circ f^{-1} = Id_{G'}$ και $f^{-1} \circ f = Id_G$. Αρκεί νδο $f^{-1}$ ομομορφισμός [illegible]
Έστω $\alpha, b \in G'$, τότε δ.δ.ο: $f^{-1}(\alpha\cdot b) = f^{-1}(\alpha)\cdot f^{-1}$[illegible]
Είναι: $f^{-1}(\alpha \cdot b) = z \in G$
$f^{-1}(\alpha) = x \in G$ και $f^{-1}$[illegible]

Άρα αρκεί νδο $z = x \cdot y$.
Αφού $f^{-1}(\alpha) = x \Rightarrow f(x) = \alpha$ και όμοια $b = f(y)$.
Τότε $\alpha \cdot b = f(x) f(y) = f(x \cdot y) =$ (αφού $f$ ομομορφισμός)
$= f(z)$.
Τότε $z = f^{-1}(\alpha \cdot b) = f^{-1}(f(x \cdot y)) =$
$= x \cdot y$.

---

**Π.χ.:** Έστω η $S_3$ και η υποομάδα της $H = \langle \mu_1 \rangle$.
Τότε η απεικόνιση $i : H \to S_3$, $i(x) = x$
είναι μονομορφισμός και $\mathrm{Im}(i) = H \leq S_3$
αλλά $H \ntrianglelefteq S_3$.

**Π.χ.:** $U(\mathbb{Z}_{12}) = \{[1]_{12}, [5]_{12}, [7]_{12}, [11]_{12}\}$

[ομάδα αντιστρέψιμων κλάσεων υπολ. mod n $= \{[k]_n \in \mathbb{Z}_n \mid (k,n) = 1\}$ με τάξη $\varphi(n)$.]

Η απεικ. $f : U(\mathbb{Z}_{12}) \to V_4$ (ομάδα του Klein)

$V_4 = \{e, a, b, c\}$

$[1]_{12} \to e$
$[5]_{12} \to \alpha$
$[7]_{12} \to b$
$[11]_{12} \to c$

είναι ισομορφισμός ομάδων.

---

Στην κλάση $\underline{Grp}$ όλων των ομάδων ορίζουμε μια σχέση ως εξής: $\forall G_1, G_2 \cong \iff \exists f : G_1 \to G_2$ ισομορφισμός ομάδων.

**Πρόταση:** Η σχέση '$\cong$' είναι μια σχέση ισοδυναμίας στην κλάση $\underline{Grp}$ η οποία καλείται σχέση ισομορφίας.

**Απόδ.:**
- $\forall G \in \underline{Grp}$: $G \cong G$ διότι η $Id_G : G \to G$ είναι ισομορφισμός ομάδων.
- $\forall G_1, G_2 \in \underline{Grp}$ και $G_1 \cong G_2$ τότε έχω $f : G_1 \to G_2$ ένας ισομορφισμός. Τότε η $f^{-1} : G_2 \to G_1$ είναι ισομορφισμός $\Rightarrow$
$\Rightarrow G_2 \cong G_1$

• $G_1 \cong G_2 \Rightarrow \exists f: G_1 \to G_2$ ισομ.
$G_2 \cong G_3 \Rightarrow \exists\, g: G_2 \to G_3$ ισομ. $\Big\} \Rightarrow g\circ f: G_1 \to G_2$
είναι ένας ισομ. ομάδων διότι η $g\circ f$: 1-1 και επί ως σύνθεση απεικ. οι οποίες είναι 1-1 κ' επί και $g\circ f$ ομομορφισμός διότι: $(g\circ f)(xy) = g(f(xy)) = g(f(x)f(y)) =$
$= (g\circ f)(x)\cdot(g\circ f)(y) \Rightarrow G_1 \cong G_3$

$\longleftrightarrow$

**Ισόμορφες ομάδες έχουν τις ίδιες δομικές ιδιότητες.**

## Δομικές Ιδιότητες Ομάδων:

1. Τάξη μιας ομάδας είναι δομική ιδιότητα.
2. Η τάξη ενός στοιχείου — // —
3. Η ιδιότητα μια ομάδα να είναι κυκλική (αβελιανή).

$\longleftrightarrow$

Έστω $G_1 \cong G_2$ και έστω $f: G_1 \to G_2$ ένας ισομορφισμός
• Αν $G_1$: κυκλική $\Rightarrow \exists\, \alpha \in G_1 : G_1 = \langle \alpha \rangle$. Τότε $G_2 = \langle f(\alpha) \rangle$.
Πράγματι: $\langle f(\alpha)\rangle \leq G_2$. Έστω $x \in G_2 \xRightarrow{f:\text{επί}} \exists y \in G_1 : f(y) = x$
Επειδή $G_1 = \langle \alpha \rangle$ και $y \in G_1 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : y = \alpha^n$. Τότε $f(y) = x \Rightarrow$
$\Rightarrow x = f(\alpha^n) \underset{f:\text{ομομ.}}{=} (f(\alpha))^n \Rightarrow y \in \langle f(\alpha) \rangle$. Άρα $G_2 = \langle f(\alpha) \rangle$.

$\longleftrightarrow$

Π.χ.: 1. $\mathbb{Z}_4 \not\cong S_3$ διότι $|\mathbb{Z}_4| = 4 \neq 6 = |S_3|$ διότι
2. $\mathbb{Z}_6$: κυκλική ενώ $S_3$: όχι κυκλική
3. $\mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Q}$ διότι $\mathbb{Z}$: κυκλική ενώ $\mathbb{Q}$: όχι κυκλική

[Αν $\mathbb{Q}$: κυκλική τότε $\exists\, \alpha \in \mathbb{Q} : \mathbb{Q} = \langle \alpha \rangle = \{n\alpha \mid n \in \mathbb{Z}\}$]
Όμως $\alpha = \frac{k}{\lambda}$, $k, \lambda \in \mathbb{Z}$, $\lambda \neq 0$ και προφανώς $k \neq 0$.
$\frac{k}{2\lambda} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{k}{2\lambda} = n \cdot \frac{k}{\lambda} \Rightarrow k\lambda = 2nk\lambda \Rightarrow 2n = 1$, άτοπο διότι $n \in \mathbb{Z}$.

Άρα $\mathbb{Q}$: όχι κυκλική $\Rightarrow \mathbb{Q} \not\cong \mathbb{Z}$.

Scanned by CamScanner

④ $(\mathbb{R},+) \cong (\mathbb{R}^{>0},\cdot)$ διότι η απεικ. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{>0}$ με $f(x)=e^x$ είναι ισομορφισμός ομάδων

⑤ $(\mathbb{R}^*,\cdot) \not\cong (\mathbb{R},+)$ διότι $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ περιέχει το $-1$ που έχει $o(-1)=2$ ενώ το μόνο στοιχείο πεπερασμένης τάξης στην $(\mathbb{R},+)$ είναι το $0$ με $o(0)=1$.

⑥ $(\mathbb{R},+) \cong (\mathbb{C},+) \Leftrightarrow$ Αξίωμα επιλογής

## (*) 1° Θεώρημα Ισομορφισμών Ομάδων (*)

Έστω $f: G\to G'$ ένας ομομορφισμός ομάδων. Τότε η απεικόνιση $\bar{f}: G/\mathrm{Ker}(f)\to \mathrm{Im}(f)$, $\bar{f}(x\mathrm{Ker}(f)) = f(x)$ είναι ένας ισομορφισμός ομάδων, και άρα $G/\mathrm{Ker}(f)\cong \mathrm{Im}(f)$.

Απόδειξη: • $\bar{f}$ είναι καλά ορισμένη: έστω ότι $x\mathrm{Ker}(f) = y\mathrm{Ker}(f)$. Δδο $\bar{f}(x\mathrm{Ker}(f)) = \bar{f}(y\mathrm{Ker}(f))$

$x\mathrm{Ker}(f) = y\mathrm{Ker}(f) \Rightarrow x^{-1}\cdot y \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow f(x^{-1}\cdot y) = e' \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x^{-1})\cdot f(y) = e' \Rightarrow (f(x))^{-1}\cdot f(y) = e' \Rightarrow f(x) = f(y)$

• Η $\bar{f}$ είναι ομομορφισμός: $\bar{f}(x\mathrm{Ker}(f)\cdot y\mathrm{Ker}(f)) =$
$= \bar{f}((x\cdot y)\mathrm{Ker}(f)) = f(x\cdot y) \overset{f:\text{ομομ.}}{=\!=\!=} f(x)\cdot f(y) =$
$= \bar{f}(x\mathrm{Ker}(f))\cdot \bar{f}(y\mathrm{Ker}(f)) \Longrightarrow \bar{f}$: ομομορφισμός.

• $\bar{f}$ μονομορφισμός: $x\mathrm{Ker}(f) \in \mathrm{Ker}(\bar{f}) \Rightarrow \bar{f}(x\mathrm{Ker}(f)) = e' \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) = e' \Rightarrow x\in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow x\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f) = e_{G/\mathrm{Ker}(f)}$
$\Rightarrow \mathrm{Ker}(\bar{f}) = \{e_{G/\mathrm{Ker}(f)}\} \Rightarrow \bar{f}$: μονομορφισμός.

• $\bar{f}$: επιμορφισμός: $\forall y\in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \exists x\in G: f(x) = y$.
Τότε $\bar{f}(x\mathrm{Ker}(f)) = f(x) = y \Rightarrow \bar{f}$: επιμορφισμός.
Άρα τελικά $\bar{f}$: ισομορφισμός.